初中数学九大几何模型

模型一：手拉手模型----旋转型全等

（1）等边三角形

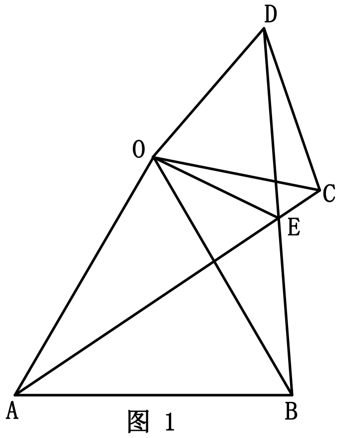


图 1

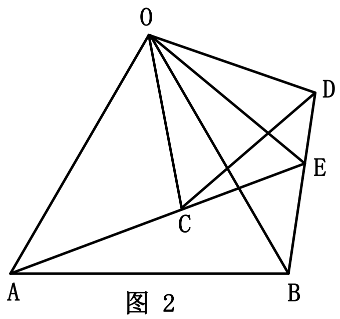


图 2

【条件】：△OAB 和△OCD 均为等边三角形；

【结论】：①△OAC≌△OBD；②∠AEB=60°；③OE 平分∠AED

（2）等腰直角三角形

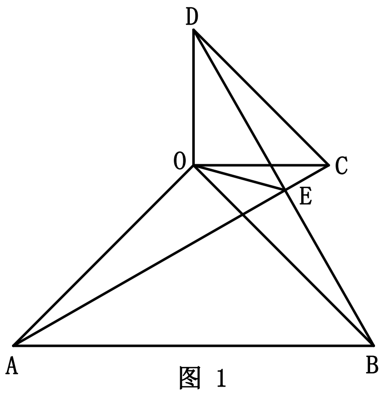


图 1

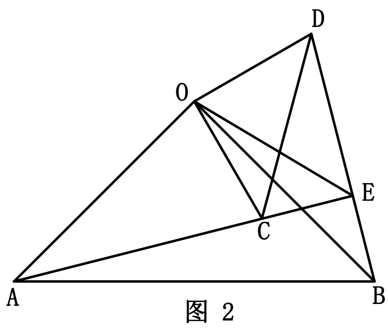


图 2

【条件】：△OAB 和△OCD 均为等腰直角三角形；

【结论】：①△OAC≌△OBD；②∠AEB=90°；③OE 平分∠AED

（3）顶角相等的两任意等腰三角形

【条件】：△OAB 和△OCD 均为等腰三角形；

且∠COD=∠AOB

【结论】：①△OAC≌△OBD；

②∠AEB=∠AOB；

③OE 平分∠AED

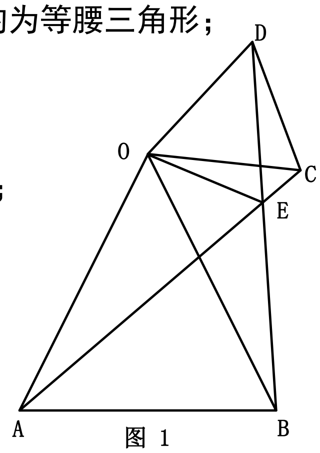


图 1

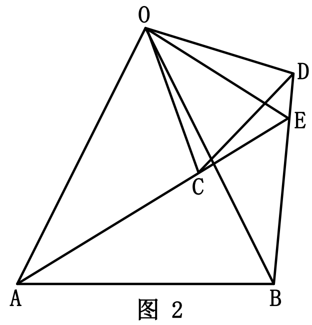


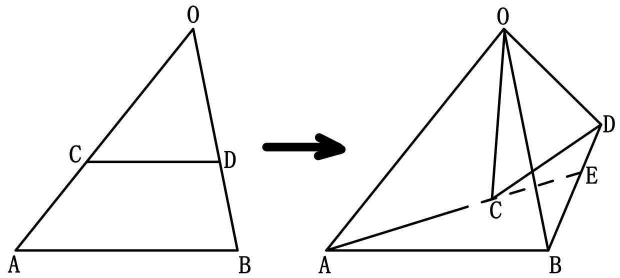
图 2

模型二：手拉手模型----旋转型相似

（1）一般情况

【条件】：CD∥AB，

将△OCD 旋转至右图的位置



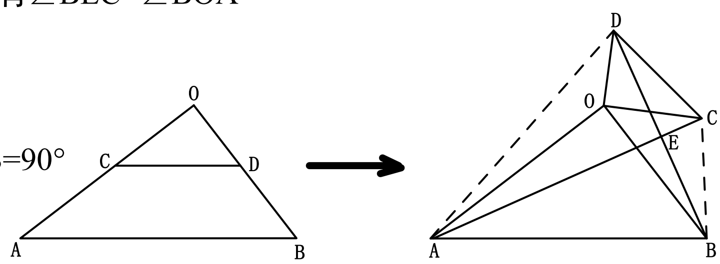
【结论】：①右图中△OCD∽△OAB→→→△OAC∽△OBD；

②延长 AC 交 BD 于点 E，必有∠BEC=∠BOA

（2）特殊情况

【条件】：CD∥AB，∠AOB=90°

将△OCD 旋转至右图的位置



【结论】：①右图中△OCD∽△OAB→→→△OAC∽△OBD；

②延长 AC 交 BD 于点 E，必有∠BEC=∠BOA；

③$\dfrac{BD}{AC}=\dfrac{OD}{OC}=\dfrac{OB}{OA}=\tan\angle OCD$；④BD⊥AC；

⑤连接 AD、BC，必有 $AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$；⑥$S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}AC\times BD$

模型三：对角互补模型

（1）全等型-90°

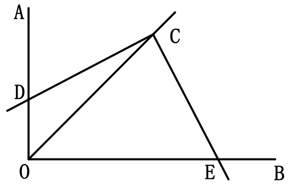


图 1

【条件】：①∠AOB=∠DCE=90°；②OC 平分∠AOB

【结论】：①CD=CE；②OD+OE=$\sqrt{2}$OC；③$S_{\triangle DCE}=S_{\triangle OCD}+S_{\triangle OCE}=\frac{1}{2}OC^2$

证明提示：

①作垂直，如图 2，证明△CDM≌△CEN

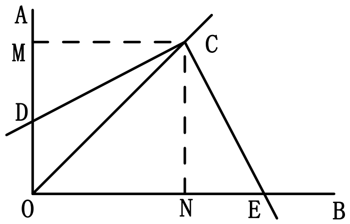


图 2

②过点 C 作 CF⊥OC，如图 3，证明△ODC≌△FEC

※当∠DCE 的一边交 AO 的延长线于 D 时（如图 4）：

以上三个结论：①CD=CE；②OE-OD=$\sqrt{2}$OC；

③$S_{\triangle OCE}-S_{\triangle OCD}=\frac{1}{2}OC^2$

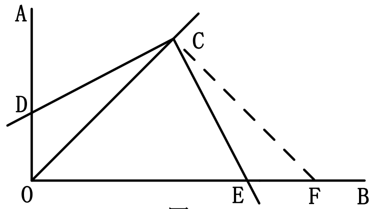


图 3

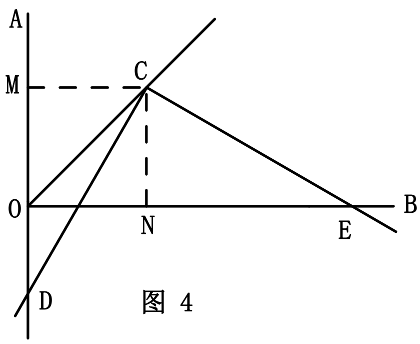


图 4

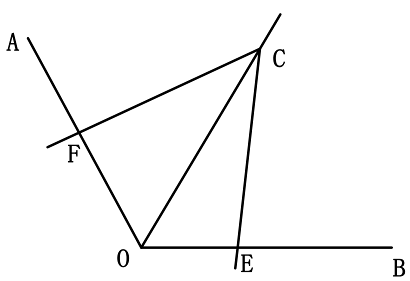
（2）全等型-120°

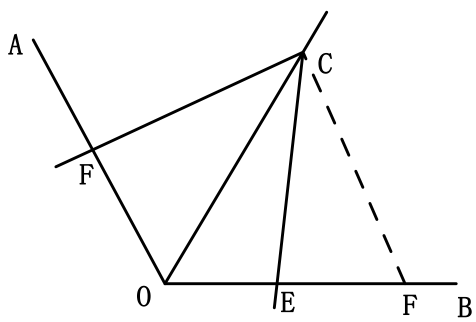
【条件】：①∠AOB=2∠DCE=120°；②OC 平分∠AOB

【结论】：①CD=CE；②OD+OE=OC；③$S_{\triangle DE}=S_{\triangle OD}+S_{\triangle OE}=\frac{\sqrt{3}}{4}OC^2$

证明提示：①可参考“全等型-90°”证法一；

②如右下图：在 OB 上取一点 F，使 OF=OC，证明△OCF 为等边三角形。



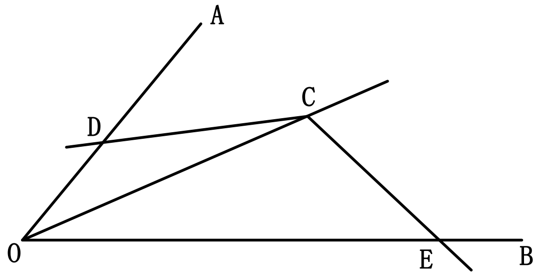


（3）全等型-任意角α

【条件】：①∠AOB=2α，∠DCE=180-2α；②CD=CE；

【结论】：①OC 平分∠AOB；②OD+OE=2OC·cosα；

③$S_{\triangle DCE}=S_{\triangle OCD}+S_{\triangle OCE}=OC^2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$



模型四：角含半角模型 90°

（1）角含半角模型 90°---1

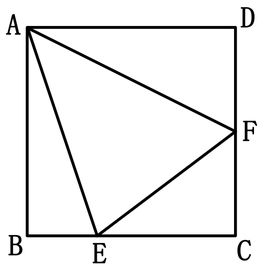
【条件】：①正方形 ABCD；②∠EAF=45°；

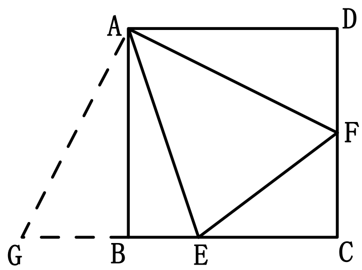
【结论】：①EF=DF+BE；②△CEF 的周长为正方形 ABCD 周长的一半；

也可以这样：

【条件】：①正方形 ABCD；②EF=DF+BE；

【结论】：①∠EAF=45°；

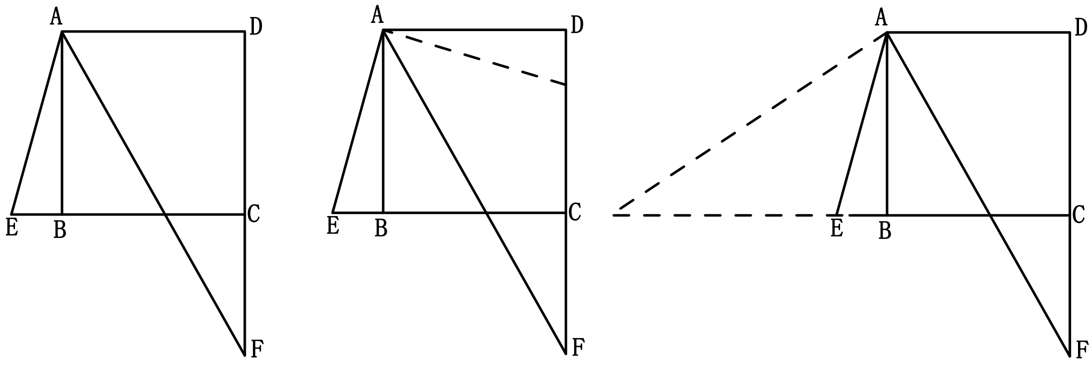




（2）角含半角模型 90°---2

【条件】：①正方形 ABCD；②∠EAF=45°；

【结论】：①EF=DF-BE；

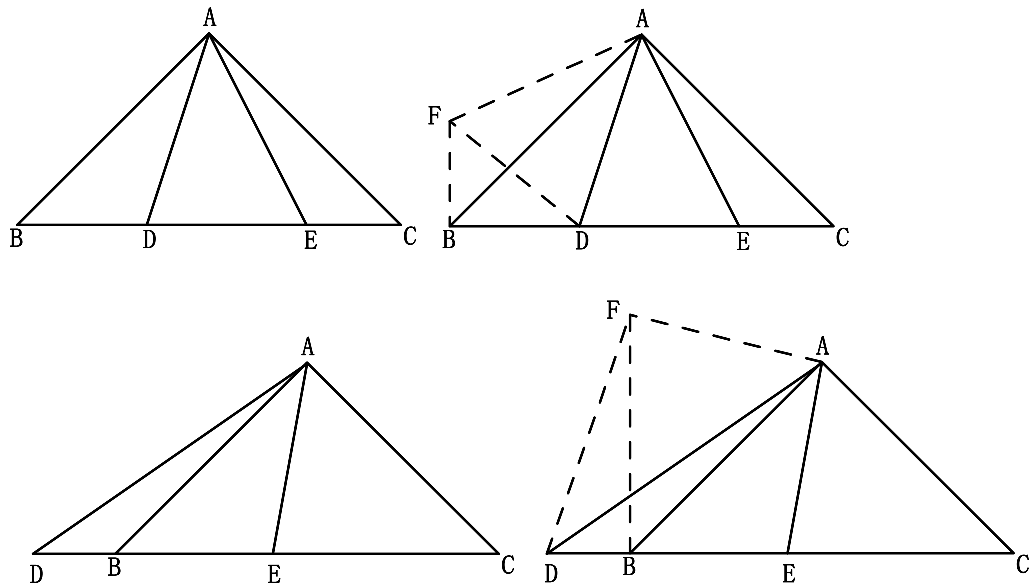


（3）角含半角模型 90°---3

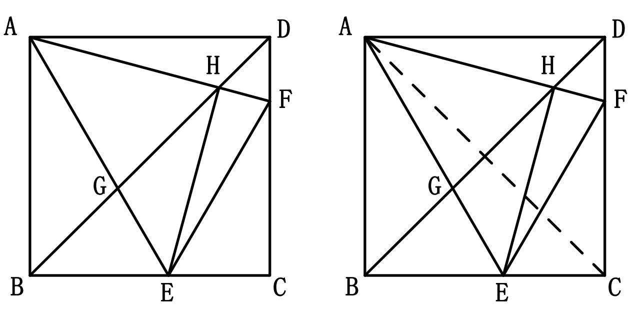
【条件】：①Rt△ABC；②∠DAE=45°；

【结论】：$BD^2+CE^2=DE^2$（如图 1）

若∠DAE 旋转到△ABC 外部时，结论 $BD^2+CE^2=DE^2$ 仍然成立（如图 2）



（4）角含半角模型 90°变形



【条件】：①正方形 ABCD；②∠EAF=45°；

【结论】：△AHE 为等腰直角三角形；

证明：连接 AC（方法不唯一）

∵∠DAC=∠EAF=45°，

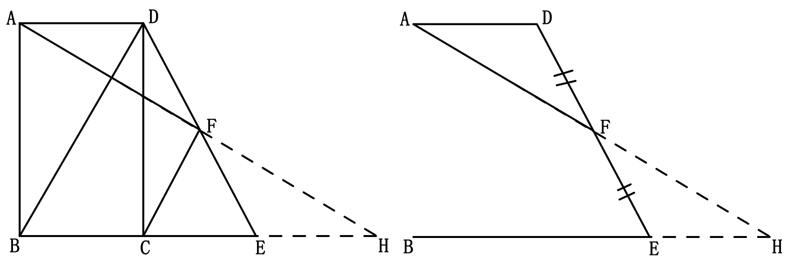
∴∠DAH=∠CAE，又∵∠ACB=∠ADB=45°；

∴△DAH∽△CAE，∴ $\frac{DA}{AH}=\frac{AC}{AE}$

∴△AHE∽△ADC，∴△AHE 为等腰直角三角形

模型五：倍长中线类模型

（1）倍长中线类模型---1



【条件】：①矩形 ABCD；②BD=BE；

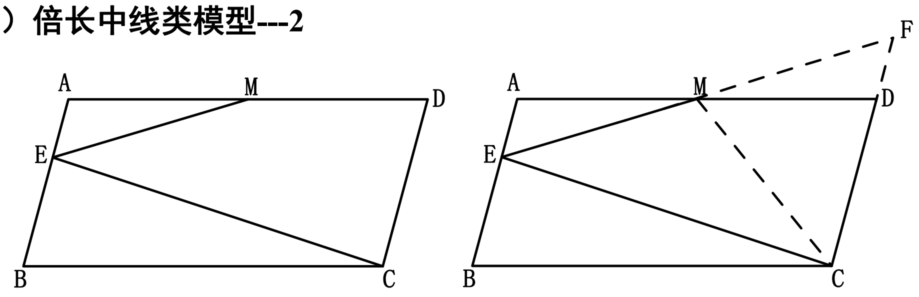
③DF=EF；

【结论】：AF⊥CF

模型提取：①有平行线 AD∥BE；②平行线间线段有中点 DF=EF；

可以构造“8”字全等△ADF≌△HEF。

（2）倍长中线类模型---2



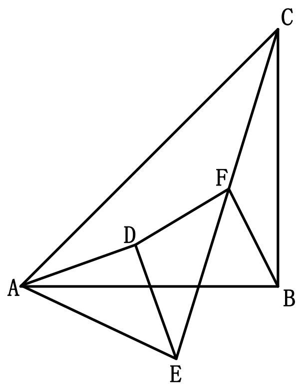
【条件】：①平行四边形 ABCD；②BC=2AB；③AM=DM；④CE⊥AB；

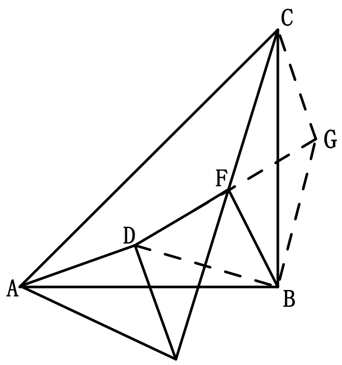
【结论】：∠EMD=3∠MEA

辅助线：有平行 AB∥CD，有中点 AM=DM，延长 EM，构造△AME≌△DMF，连接 CM 构造

等腰△EMC，等腰△MCF。（通过构造 8 字全等线段数量及位置关系，角的大小转化）

模型六：相似三角形 360°旋转模型





（1）相似三角形（等腰直角）360°旋转模型---倍长中线法

【条件】：①△ADE、△ABC 均为等腰直角三角形；②EF=CF；

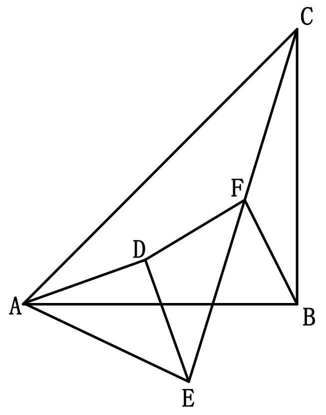
【结论】：①DF=BF；②DF⊥BF

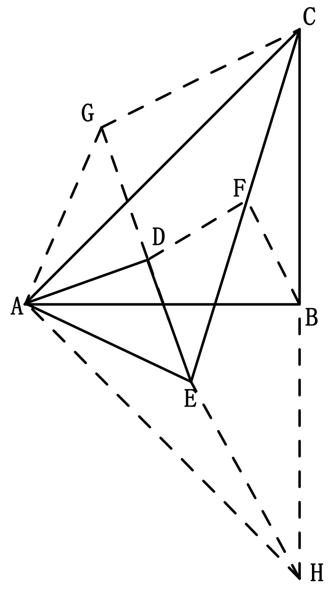
辅助线：延长 DF 到点 G，使 FG=DF，连接 CG、BG、BD，证明△BDG 为等腰直角三角形；

突破点：△ABD≌△CBG；

难点：证明∠BAO=∠CBG

（2）相似三角形（等腰直角）360°旋转模型---补全法





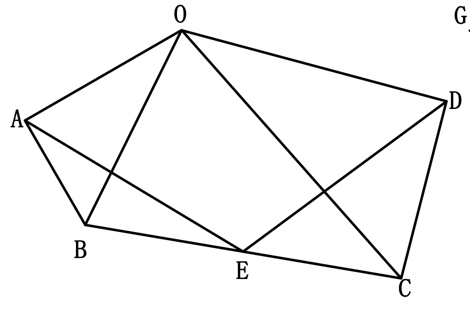
【条件】：①△ADE、△ABC 均为等腰直角三角形；②EF=CF；

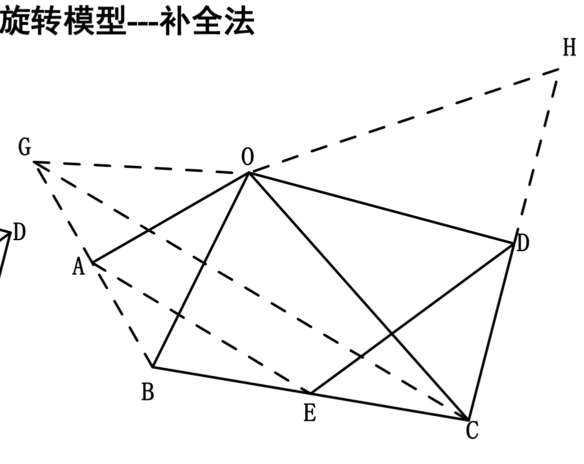
【结论】：①DF=BF；②DF⊥BF

辅助线：构造等腰直角△AEG、△AHC；

辅助线思路：将 DF 与 BF 转化到 CG 与 EF。

（3）任意相似直角三角形 360°旋转模型---补全法





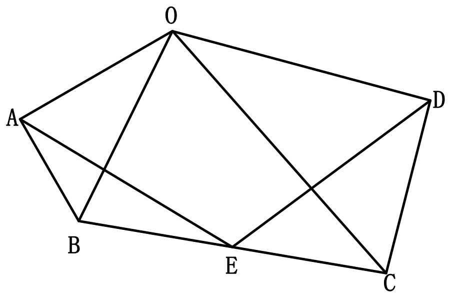
【条件】：①△OAB∽△ODC；②∠OAB=∠ODC=90°；③BE=CE；

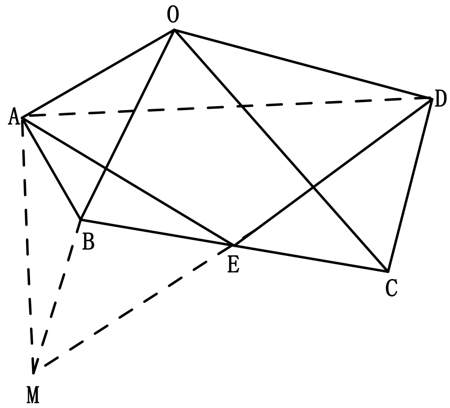
【结论】：①AE=DE；②∠AED=2∠ABO

辅助线：延长 BA 到 G，使 AG=AB，延长 CD 到点 H 使 DH=CD，补全△OGB、

△OCH 构造旋转模型。转化 AE 与 DE 到 CG 与 BH，难点在转化∠AED。

（4）任意相似直角三角形 360°旋转模型---倍长法





【条件】：①△OAB∽△ODC；②∠OAB=∠ODC=90°；③BE=CE；

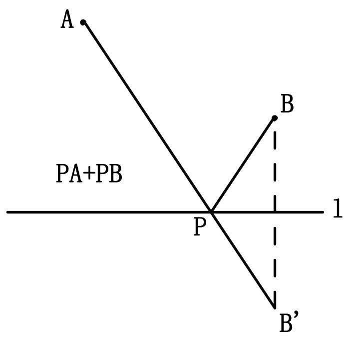
【结论】：①AE=DE；②∠AED=2∠ABO

辅助线：延长 DE 至 M，使 ME=DE，将结论的两个条件转化为证明△AMD∽△ABO，此为难点，

将△AMD∽△ABC 继续转化为证明△ABM ∽△AOD，使用两边成比例且夹角相等，此处难点在证明∠ABM=∠AOD

模型七：最短路程模型

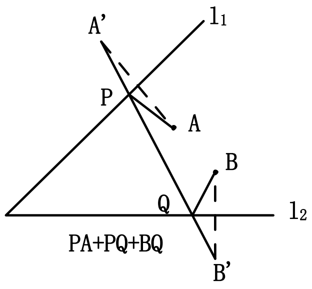
（1）最短路程模型一（将军饮马类）

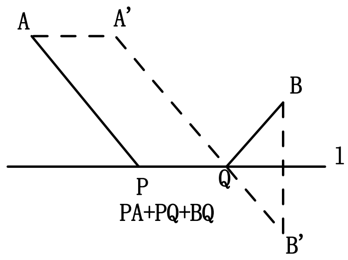


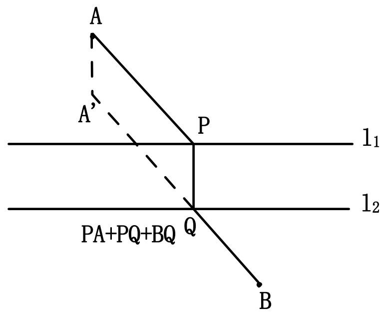
总结：右四图为常见的轴对称类最短路程问题，

最后都转化到：“两点之间，线段最短：解决；

特点：①动点在直线上；②起点，终点固定







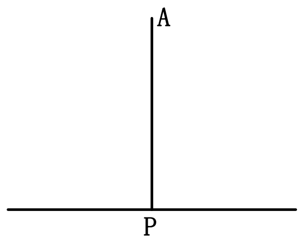
（2）最短路程模型二（点到直线类 1）

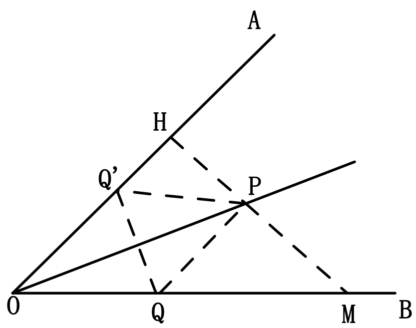
【条件】：①OC 平分∠AOB；②M 为 OB 上一定点；③P 为 OC 上一动点；④Q 为 OB 上一动点；

【问题】：求 MP+PQ 最小时，P、Q 的位置？

辅助线：将作 Q 关于 OC 对称点 Q’，转化 PQ’=PQ，过点 M 作 MH⊥OA，

则 MP+PQ=MP+PQ’≥MH(垂线段最短）



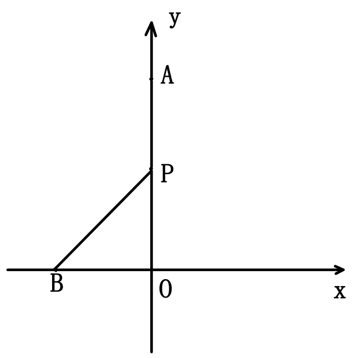


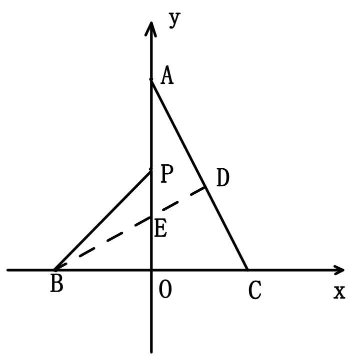
（3）最短路程模型二（点到直线类 2）

【条件】：A(0,4),B(-2,0),P(0,n)

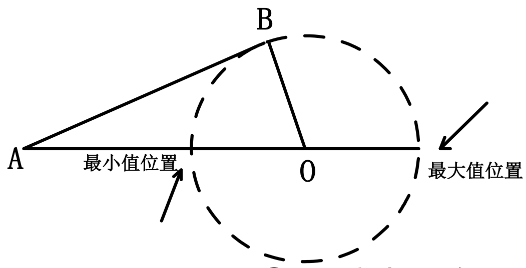
【问题】：n 为何值时，$PB+\frac{\sqrt{5}}{5}PA$ 最小？

求解方法：①x 轴上取 C(2,0),使 sin∠OAC=$\frac{\sqrt{5}}{5}$；②过 B 作 BD⊥AC，交 y 轴于点 E，即为所求；③tan∠EBO=tan∠OAC=$\frac{1}{2}$，即 E（0，1）





（4）最短路程模型三（旋转类最值模型）

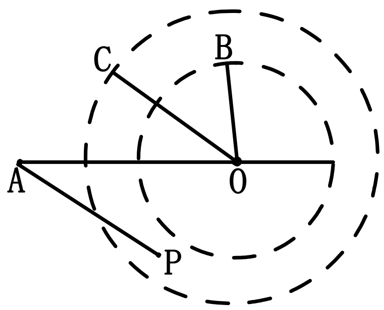


【条件】：①线段 OA=4，OB=2；②OB 绕点 O 在平面内 360°旋转；

【问题】：AB 的最大值，最小值分别为多少？

【结论】：以点 O 为圆心，OB 为半径作圆，如图所示，将问题转化为“三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边”。

最大值：OA+OB；最小值：OA-OB

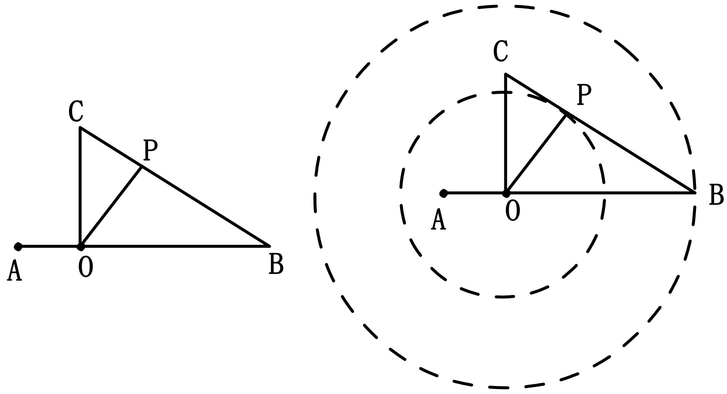


【条件】：①线段 OA=4，OB=2；②以点 O 为圆心，OB，OC 为半径作圆；

③点 P 是两圆所组成圆环内部（含边界）一点；

【结论】：若 PA 的最大值为 10，则 OC=_6_；若 PA 的最小值为 1，则 OC=__3__；

若 PA 的最小值为 2，则 PC 的取值范围是___0<PC<2___



【条件】：①Rt△OBC，∠OBC=30°；

②OC=2；③OA=1；④点 P 为 BC 上动点（可与端点重合）；

⑤△OBC 绕点 O 旋转

【结论】：PA 最大值为 OA+OB=$1+2\sqrt{3}$；PA 的最小值为$\frac{1}{2}$OB = OA = $\sqrt{3}-1$

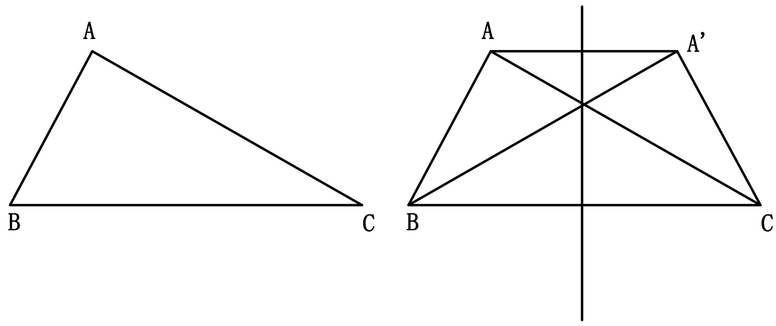
如下图，圆的最小半径为 O 到 BC 垂线段长。

模型八：二倍角模型

【条件】：在△ABC 中，∠B=2∠C；

辅助线：以 BC 的垂直平分线为对称轴，作点 A 的对称点 A’，连接 AA’、BA’、CA’，则 BA=AA’=CA’(注意这个结论）

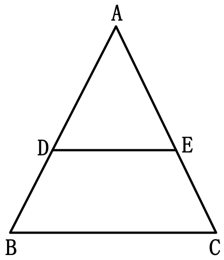
此种辅助线作法是二倍角三角形常见的辅助线作法之一，不是唯一作法。



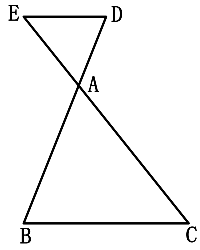
模型九：相似三角形模型

（1）相似三角形模型--基本型

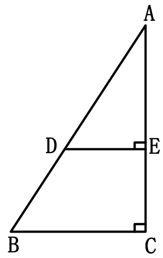
平行类：DE∥BC；



A 字型



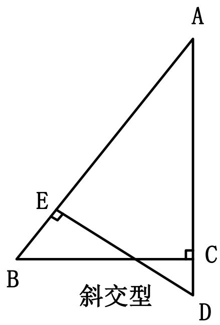
8 字型



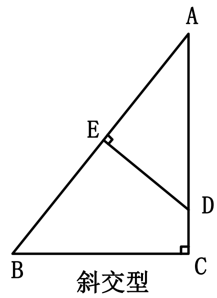
A 字型

结论：$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$(注意对应边要对应）

（2）相似三角形模型---斜交型



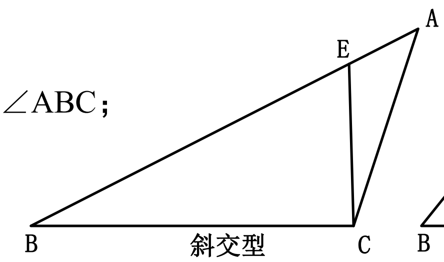
斜交型



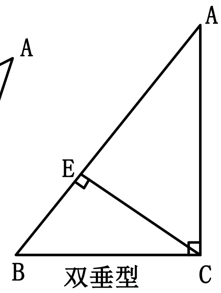
斜交型

【条件】：如右图，∠AED=∠ACB=90°；

【结论】：AE×AB=AC×AD



斜交型



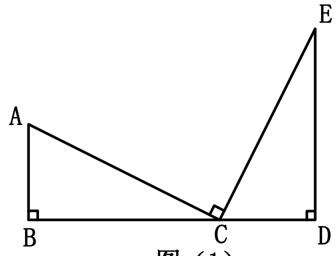
双垂型

【条件】：如右图，∠ACE=∠ABC；

【结论】：AC^2=AE×AB

第四个图还存在射影定理：AE×EC=BC×AC；BC^2=BE×BA；CE^2=AE×BE；

（3）相似三角形模型---一线三等角型



图（1）

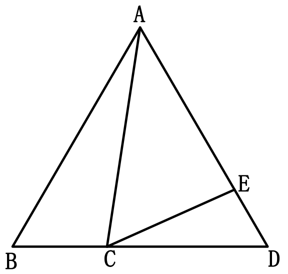
【条件】：（1）图：∠ABC=∠ACE=∠CDE=90°；

（2）图：∠ABC=∠ACE=∠CDE=60°；

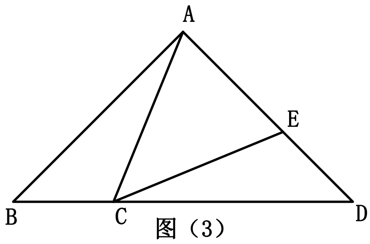
（3）图：∠ABC=∠ACE=∠CDE=45°；

【结论】：①△ABC∽△CDE；②AB×DE=BC×CD；

一线三等角模型也经常用来建立方程或函数关系。

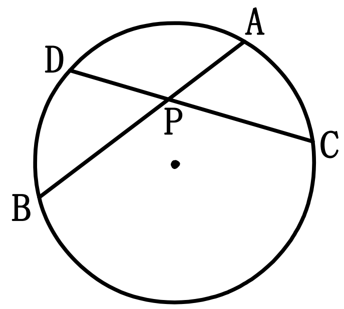


图（2）



图（3）

（4）相似三角形模型---圆幂定理型



图（1）

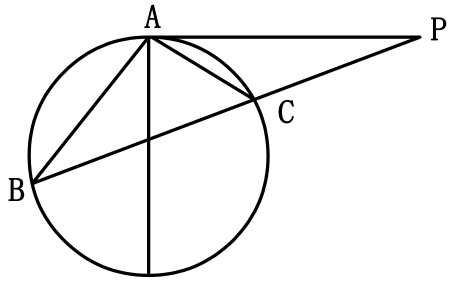
【条件】:（2）图：PA 为圆的切线；

【结论】:（1）图：PA×PB=PC×PD；

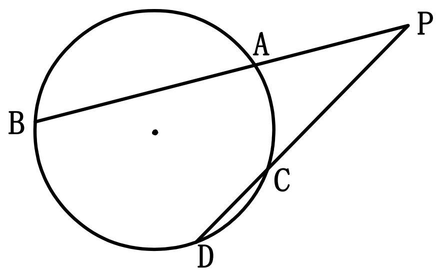
（2）图：PA^2=PC×PB;

（3）图：PA×PB=PC×PD；

以上结论均可以通过相似三角形进行证明。



图（2）



图（3）