

新人教版九年级上册数学知识点归纳

第二十一章 一元二次方程

21.1 一元二次方程

在一个等式中，只含有一个未知数，且未知数的最高次数是 2 次的整式方程叫做一元二次方程。

一元二次方程有四个特点：(1) 只含有一个未知数；(2) 且未知数次数最高次数是 2；(3) 是整式方程。要判断一个方程是否为一元二次方程，先看它是否为整式方程，若是，再对它进行整理。如果能整理为 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的形式，则这个方程就为一元二次方程。(4) 将方程化为一般形式： $ax^2+bx+c=0$ 时，应满足 ($a \neq 0$)

21.2 降次——解一元二次方程

解一元二次方程的基本思想方法是通过“降次”将它化为两个一元一次方程。一元二次方程有四种解法：

1、直接开平方法：

用直接开平方法解形如 $(x-m)^2=n(n \geq 0)$ 的方程，其解为 $x=\pm m$ 。

直接开平方法就是平方的逆运算。通常用根号表示其运算结果。

2、配方法

通过配成完全平方式的方法，得到一元二次方程的根的方法。这种解一元二次方程的方法称为配方法，配方的依据是完全平方公式。

1. 转化：将此一元二次方程化为 $ax^2+bx+c=0$ 的形式（即一元二次方程的一般形式）

2. 系数化 1：将二次项系数化为 1

3. 移项：将常数项移到等号右侧

4. 配方：等号左右两边同时加上一项系数一半的平方

5. 变形：将等号左边的代数式写成完全平方形式

6. 开方：左右同时开平方

7. 求解：整理即可得到原方程的根

$$x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$
$$x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

3、公式法

公式法：把一元二次方程化成一般形式，然后计算判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 的值，当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时，把各项系数 a, b, c 的值代入求根公式 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 就可得到方程的根。

因式分解法：把方程变形为一边是零，把另一边的二次三项式分解成两个一次因式的积的形式，让两个一次因式分别等于零，得到两个一元一次方程，解这两个一元一次方程所得到的根，就是原方程的两个根。这种解一元二次方程的方法叫做因式分解法。

21.3 实际问题与一元二次方程

列一元二次方程解应用题是列一元一次方程解应用题的继续和发展

从列方程解应用题的方法来讲，列出一元二次方程解应用题与列出一元一次方程解应用题是非常相似的，由于一元一次方程未知数是一次，因此这类问题大部分都可通过算术方法来解决。如果未知数出现二次，用算术方法就很困难了，正由于未知数是二次的，所以可以用一元二次方程解决有关面积问题，经过两次增长的平均增长率问题，数学问题中涉及积的一些问题，经营决策问题等等。

第二十二章 二次函数

22.1 二次函数及其图像

二次函数 (quadratic function) 是指未知数的最高次数为二次的多项式函数。二次函数可以表示为 $y=ax^2+bx+c$ (a 不为 0)。其图像是一条主轴平行于 y 轴的抛物线。

一般的, 自变量 x 和因变量 y 之间存在如下关系:

一般式 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0, a, b, c$ 为常数), 顶点坐标为 $(-b/2a, (b^2-4ac)/4a)$;

顶点式

$y=a(x-h)^2+k$ ($a \neq 0, a, h, k$ 为常数) 或 $y=a(x-h)^2+k$ ($a \neq 0, a, h, k$ 为常数), 顶点坐标为 (h, k) 对称轴为 $x=h$, 顶点的位置特征和图像的开口方向与函数 $y = ax^2$ 的图像相同, 有时题目会指出让你用配方法把一般式化成顶点式;

交点式

$y=a(x-x_1)(x-x_2)$ [仅限于与 x 轴有交点 $A(x_1, 0)$ 和 $B(x_2, 0)$ 的抛物线] ;

重要概念: a, b, c 为常数, $a \neq 0$, 且 a 决定函数的开口方向, $a > 0$ 时, 开口方向向上, $a < 0$ 时, 开口方向向下。

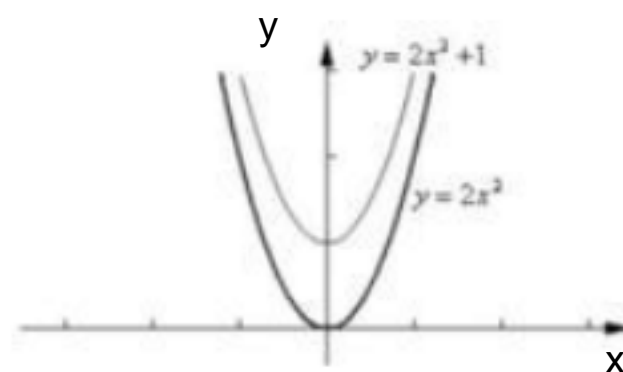
a 的绝对值还可以决定开口大小, a 的绝对值越大开口就越小, a 的绝对值越小开口就越大。

在平面直角坐标系中作出二次函数 $y=x^2$ 的平方的图像,

可以看出, 二次函数的图像是一条永无止境的抛物线。

不同的二次函数图像

如果所画图形准确无误, 那么二次函数将是由一般式平移得到的。



轴对称

1. 抛物线是轴对称图形。对称轴为直线 $x = -b/2a$ 。

对称轴与抛物线唯一的交点为抛物线的顶点 P 。特别地, 当 $b=0$ 时, 抛物线的对称轴是 y 轴 (即直线 $x=0$)

顶点

2. 抛物线有一个顶点 P , 坐标为 $P(-b/2a, (b^2-4ac)/4a)$

当 $-b/2a=0$ 时, P 在 y 轴上; 当 $b^2-4ac=0$ 时, P 在 x 轴上。

开口

3. 二次项系数 a 决定抛物线的开口方向和大小。

当 $a > 0$ 时, 抛物线向上开口; 当 $a < 0$ 时, 抛物线向下开口。

$|a|$ 越大, 则抛物线的开口越小。

决定对称轴位置的因素

4. 一次项系数 b 和二次项系数 a 共同决定对称轴的位置。

当 a 与 b 同号时 (即 $ab > 0$), 对称轴在 y 轴左; 因为若对称轴在左边则对称轴小于 0, 也就是 $-b/2a < 0$, 所以 $b/2a$ 要大于 0, 所以 a, b 要同号

当 a 与 b 异号时 (即 $ab < 0$), 对称轴在 y 轴右。因为对称轴在右边则对称轴要大于 0, 也就是 $-b/2a > 0$, 所以 $b/2a$ 要小于 0, 所以 a, b 要异号

可简单记忆为左同右异, 即当 a 与 b 同号时 (即 $ab > 0$), 对称轴在 y 轴左; 当 a 与 b 异号时 (即 $ab < 0$), 对称轴在 y 轴右。

事实上， b 有其自身的几何意义：抛物线与 y 轴的交点处的该抛物线切线的函数解析式（一次函数）的斜率 k 的值。可通过对二次函数求导得到。

决定抛物线与 y 轴交点的因素

5. 常数项 c 决定抛物线与 y 轴交点。

抛物线与 y 轴交于 $(0, c)$

抛物线与 x 轴交点个数

6. 抛物线与 x 轴交点个数

$= b^2 - 4ac > 0$ 时，抛物线与 x 轴有 2 个交点。 $= b^2 - 4ac = 0$ 时，抛物线与 x 轴有 1 个交点。

$= b^2 - 4ac < 0$ 时，抛物线与 x 轴没有交点。

当 $a > 0$ 时，函数在 $x = -b/2a$ 处取得最小值，当 $a < 0$ 时，函数在 $x = -b/2a$ 处取得最大值

当 $b = 0$ 时，抛物线的对称轴是 y 轴，

7. 特殊值的形式

当 $x = 1$ 时 $y = a + b + c$ 当 $x = -1$ 时 $y = a - b + c$ 当 $x = 2$ 时 $y = 4a + 2b + c$

当 $x = -2$ 时 $y = 4a - 2b + c$

用函数观点看一元二次方程

1. 如果抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴有公共点，公共点的横坐标是 x_0 ，那么当 $x = x_0$ 时，函数的值是 0，因此 $x = x_0$ 就是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根。

2. 二次函数的图象与 x 轴的位置关系有三种：没有公共点，有一个公共点，有两个公共点。这对应着一元二次方程根的三种情况：没有实数根，有两个相等的实数根，有两个不等的实数根。

实际问题与二次函数

在日常生活、生产和科研中，求使材料最省、时间最少、效率最高等问题，有些可归结为求二次函数的最大值或最小值。

第二十三章 旋转

23.1 图形的旋转

1. 图形的旋转

(1) 定义：在平面内，将一个图形绕一个定点沿某个方向（顺时针或逆时针）转动一个角度，这样的图形运动叫做旋转，这个定点叫做旋转中心，转动的角称为旋转角。

(2) 生活中的旋转现象大致有两大类：一类是物体的旋转运动，如时钟的时针、分针、秒针的转动，风车的转动等；另一类则是由某一基本图形通过旋转而形成的图案，如香港特别行政区区旗上的紫荆花图案。

(3) 图形的旋转不改变图形的大小和形状，旋转是由旋转中心和旋转角所决定，旋转中心可以在图形上也可以在图形外。

(4) 会找对应点，对应线段和对应角。

2. 旋转的基本特征：

(1) 图形在旋转时，图形中的每一个点都绕旋转中心旋转了同样大小的角度。

(2) 图形在旋转时，对应点到旋转中心的距离相等，对应线段相等，对应角相等；

(3) 图形在旋转时，图形的大小和形状都没有发生改变。

3. 几点说明：

(1) 在理解旋转特征时，首先要对照图形，找出旋转中心、旋转方向、对应点、旋转角。

(2) 旋转的角度是对应线段的夹角或对应顶点与旋转中心连线的夹角。

(3) 旋转中心的确定分两种情况，即在图形上或在图形外，若在图形上，哪一点旋转过程中位置没有改变，哪一点就是旋转中心；若在图形外，对应点连线的垂直平分线的交点就是旋转中心。

23.2 中心对称

中心对称：把一个图形绕着某一点旋转 180° ，假如它能够与另一个图形重合，那么这刘遇图形关于这个点对称或中心对称。

中心对称的性质：关于中心对称的刘遇图形，对应点所连线段都经过对称中心，而且被对称中心所平分。

关于中心对称的刘遇图形是全等形。

中心对称图形：把一个图形绕着某一个点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形。

对称点的坐标规律：关于 x 轴对称：横坐标不变，纵坐标互为相反数，关于 y 轴对称：横坐标互为相反数，纵坐标不变，关于原点对称：横坐标、纵坐标都互为相反数。

23.3 课题学习 图案设计

灵活运用平移、旋转、轴对称等变换进行图案设计。

图案设计就是通过图形变换（平移、旋转、轴对称或几种的组合）把基本图形组成具有一定意义的新图形，图案设计时不仅要看是否正确使用了图形变换，还要看图案是否很好的体现了设计意图。

第二十四章 圆

24.1 圆

定义：(1) 平面上到定点的距离等于定长的所有点组成的图形叫做圆。

(2) 平面上一条线段，绕它的一端旋转 360° ，留下的轨迹叫圆。

圆心：(1) 如定义(1)中，该定点为圆心

(2) 如定义(2)中，绕的那一端的端点为圆心。

(3) 圆任意两条对称轴的交点为圆心。

(4) 垂直于圆内任意一条弦且两个端点在圆上的线段的二分点为圆心。

注：圆心一般用字母 O 表示

直径：通过圆心，并且两端都在圆上的线段叫做圆的直径。直径一般用字母 d 表示。

半径：连接圆心和圆上任意一点的线段，叫做圆的半径。半径一般用字母 r 表示。

圆的直径和半径都有无数条。圆是轴对称图形，每条直径所在的直线是圆的对称轴。在同圆或等圆中：直径是半径的 2 倍，半径是直径的二分之一 $d=2r$ 或 $r=$ 二分之 d 。

圆的半径或直径决定圆的大小，圆心决定圆的位置。

圆的周长：围成圆的曲线的长度叫做圆的周长，用字母 C 表示。

圆的周长与直径的比值叫做圆周率。

圆的周长除以直径的商是一个固定的数，把它叫做圆周率，它是一个无限不循环小数（无理数），用字母表示。计算时，通常取它的近似值， 3.14 。

直径所对的圆周角是直角。 90° 的圆周角所对的弦是直径。

圆的面积公式：圆所占平面的大小叫做圆的面积。 πr^2 ，用字母 S 表示。

一条弧所对的圆周角是圆心角的一半。

在同圆或等圆中，相等的圆心角所对的弧相等，所对的弦相等，所对的弦心距也相等。

在同圆或等圆中，如果两条弧相等，那么他们所对的圆心角相等，所对的弦相等，所对的弦心距也相等。

在同圆或等圆中，如果两条弦相等，那么他们所对的圆心角相等，所对的弧相等，所对的弦心距也相等。

周长计算公式

1、已知直径： $C = \pi d$ 2、已知半径： $C = 2\pi r$ 3、已知周长：

4、圆周长的一半： $\frac{1}{2}C$ 5、半圆的长： $\frac{1}{2}C + d$

面积计算公式：

1、已知半径： $S = \pi r^2$ 2、已知直径： $S = \pi (\frac{d}{2})^2$ 3、已知周长： $S = \frac{C^2}{4\pi}$ 平方

24.2 点、直线、圆和圆的位置关系

1. 点和圆的位置关系

点在圆内 \Leftrightarrow 点到圆心的距离小于半径 点在圆上 \Leftrightarrow 点到圆心的距离等于半径

点在圆外 \Leftrightarrow 点到圆心的距离大于半径

2. 过三点的圆不在同一直线上的三个点确定一个圆。

3. 外接圆和外心

经过三角形的三个顶点可以做一个圆，这个圆叫做三角形的外接圆。

外接圆的圆心是三角形三条边垂直平分线的交点，叫做三角形的外心。

4. 直线和圆的位置关系

相交：直线和圆有两个公共点叫这条直线和圆相交，这条直线叫做圆的割线。

相切：直线和圆有一个公共点叫这条直线和圆相切，这条直线叫做圆的切线，这个点叫做切点。

相离：直线和圆没有公共点叫这条直线和圆相离。

5. 直线和圆位置关系的性质和判定

如果 O 的半径为 r ，圆心 O 到直线 l 的距离为 d ，那么

直线 l 和 O 相交 $\Leftrightarrow d < r$ ； 直线 l 和 O 相切 $\Leftrightarrow d = r$ ； 直线 l 和 O 相离 $\Leftrightarrow d > r$ 。

圆和圆

定义：

两个圆没有公共点且每个圆的点都在另一个圆的外部时，叫做这两个圆的外离。

两个圆有唯一的公共点且除了这个公共点外，每个圆上的点都在另一个圆的外部，叫做两个圆的外切。

两个圆有两个交点，叫做两个圆的相交。

两个圆有唯一的公共点且除了这个公共点外，每个圆上的点都在另一个圆的内部，叫做两个圆的内切。

两个圆没有公共点且每个圆的点都在另一个圆的内部时，叫做这两个圆的内含。

原理：

圆心距和半径的数量关系：

两圆外离 $\Leftrightarrow d > R+r$ 两圆外切 $\Leftrightarrow d=R+r$

两圆相交 $\Leftrightarrow R-r < d < R+r$ ($R > r$) 两圆内切 $\Leftrightarrow d=R-r$ ($R > r$)

两圆内含 $\Leftrightarrow d < R-r$ ($R > r$)

24.3 正多边形和圆

1、正多边形的概念：各边相等，各角也相等的多边形叫做正多边形。

2、正多边形与圆的关系：

(1) 将一个圆 n ($n \geq 3$) 等分 (可以借助量角器)，依次连结各等分点所得的多边形是这个圆的内接正多边形。

(2) 这个圆是这个正多边形的外接圆。

3、正多边形的有关概念：

(1) 正多边形的中心——正多边形的外接圆的圆心。

(2) 正多边形的半径——正多边形的外接圆的半径。

(3) 正多边形的边心距——正多边形中心到正多边形各边的距离。

(4) 正多边形的中心角——正多边形每一边所对的外接圆的圆心角。

4、正多边形性质：

(1) 任何正多边形都有一个外接圆。

(2) 正多边形都是轴对称图形，当边数是偶数时，它又是中心对称图形，正 n 边形的对称轴有 n 条。

(3) 边数相同的正多边形相似。

重点：正多边形的有关计算。

知识讲解

1、正多边形定义：各边相等，各角也相等的多边形叫正多边形。

例如：正三角形、正四边形 (正方形)、正六边形等等。如果一个正多边形有 n 条边，那么，这个多边形叫正 n 边形。

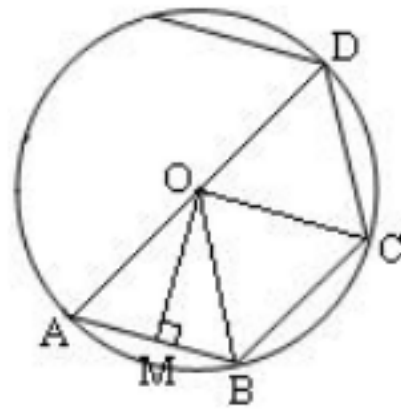
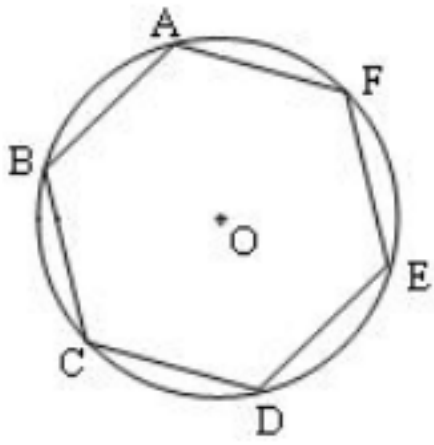
再如：矩形不是正多边形，因为它只具有各角相等，而各边不一定相等；菱形不是正多边形，因为它只具有各边相等，而各角不一定相等。

2、正多边形与圆的关系。

正多边形与圆有密切关系，把圆分成 n ($n \geq 3$) 等份，依次连结分点所得的多边形是这个圆的内接正 n 边形。

相邻分点间的弧相等，则所对的弦 (正多边形的边) 相等，相邻两弦所夹的角 (多边形的每个内角) 都相等，从而得出，所连的多边形满足了所有边都相等，所有内角都相等，从而这个多边形就是正多边形。

如：将圆 6 等分，即 $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EF} = \widehat{FA}$ ，则 $AB = BC = CD = DE = EF = FA$ 。



观察 A、B、C、D、E、F 所对的弧可以发现都是相等的弧，所以， $\overset{\frown}{A} = \overset{\frown}{B} = \overset{\frown}{C} = \overset{\frown}{D} = \overset{\frown}{E} = \overset{\frown}{F}$ 。

所以，将一个圆 6 等分，依次连结各分点所得到的就是 O 的内接正六边形。

3、正多边形的有关计算。

(1) 首先要明确与正多边形计算的有关概念：即正多边形的中心 O，正多边形的半径 R_n ——就是其外接圆的半径，正多边形的边心距 r_n ，正多边形的中心角 α_n ，正多边形的边长 a_n 。

(2) 正 n 边形的 n 条半径把正 n 边形分成 n 个全等的等腰三角形，等腰三角形的顶角就是正 n 边形的中心角都等于 $\frac{360^\circ}{n}$ ；如果再作出正 n 边形各边的边心距，这些边心距又把这 n 个等腰三角形分成了 2n 个全等的直角三角形。

如图：是一个正 n 边形 ABCD，根据以上讲解，我们来分析 Rt△AOM 的基本元素：

斜边 OA——正 n 边形的半径 R_n ；

一条直角边 OM——正 n 边形的边心距 r_n ；

一条直角边 AM——正 n 边形的边长 a_n 的一半即 $AM = \frac{1}{2} a_n$ ；

锐角 AOM——正 n 边形的中心角 α_n 的一半即 $\angle AOM = \frac{1}{2} \alpha_n = \frac{180^\circ}{n}$ ；

锐角 OAM——正 n 边形内角的一半即 $\angle OAM = \frac{1}{2n} [(n-2) \cdot 180^\circ]$ ；

可以看到在这个直角三角形中的各元素恰好反映了正 n 边形的各元素。

因此，就可以把正 n 边形的有关计算归纳为解直角三角形的问题。

4、正多边形的有关作图。

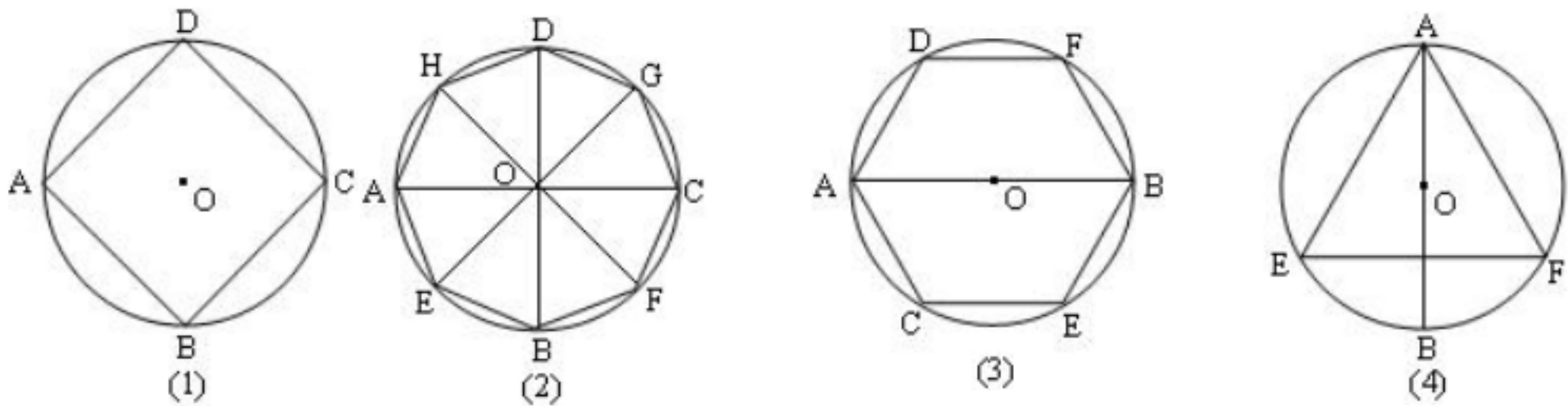
(1) 使用量角器来等分圆。

由于在同圆中相等的圆心角所对的弧也相等，因此作相等的圆心角（即等分顶点在圆心的周角）可以等分圆；根据同圆中相等弧所对的弦相等，依次连接各分点就可画出相应的正 n 边形。

(2) 用尺规来等分圆。

对于一些特殊的正 n 边形，还可以用圆规和直尺作出图形。

正四、八边形。



在 O 中，用尺规作两条互相垂直的直径就可把圆分成 4 等份，从而作出正四边形。再逐次平分各边所对的弧（即作 AOB 的平分线交 \widehat{AB} 于 E）就可作出正八边形、正十六边形等，边数逐次倍增的正多边形。

正六、三、十二边形的作法。

通过简单计算可知，正六边形的边长与其半径相等，所以，在 O 中，任画一条直径 AB，分别以 A、B 为圆心，以 O 的半径为半径画弧与 O 相交于 C、D 和 E、F，则 A、C、E、B、F、D 是 O 的 6 等分点。

显然，A、E、F（或 C、B、D）是 O 的 3 等分点。

同样，在图 (3) 中平分每条边所对的弧，就可把 O 12 等分。

5、正多边形的对称性。

正多边形都是轴对称图形，一个正 n 边形共有 n 条对称轴，每条对称轴都通过正 n 边形的中心，如果正多边形有偶数条边，那么，它又是中心对称图形，它的中心就是对称中心。

如：正三角形、正方形。

24.4 弧长和扇形面积

知识点 1、弧长公式

因为 360° 的圆心角所对的弧长就是圆周长 $C = 2\pi R$ ，所以 1° 的圆心角所对的弧长是 $\frac{2\pi R}{360}$ ，即 $\frac{\pi R}{180}$ ，于是可得

半径为 R 的圆中， n° 的圆心角所对的弧长 l 的计算公式：
$$l = \frac{n\pi R}{180}$$

说明：(1) 在弧长公式中，n 表示 1° 的圆心角的倍数，n 和 180 都不带单位“度”，例如，圆的半径 $R = 10$ ，

计算 20° 的圆心角所对的弧长 l 时，不要错写成 $l = \frac{1}{180} \times 20^\circ \times 10\pi$ 。

(2) 在弧长公式中，已知 l，n，R 中的任意两个量，都可以求出第三个量。

知识点 2、扇形的面积

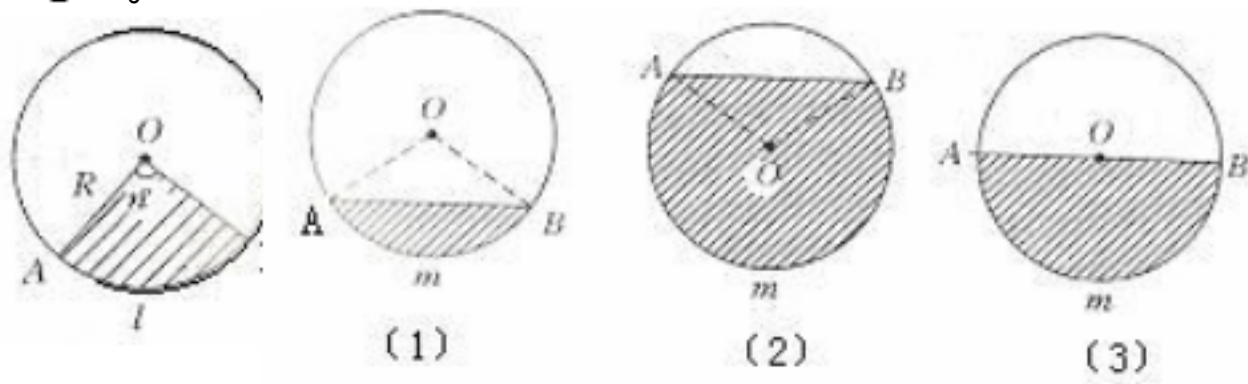
如图所示，阴影部分的面积就是半径为 R，圆心角为 n° 的扇形面积，显然扇形的面积是它所在圆的面积的一

部分，因为圆心角是 360° 的扇形面积等于圆面积 πR^2 ，所以圆心角为 1° 的扇形面积是 $\frac{\pi R^2}{360}$ ，由此得圆心角为 n°

的扇形面积的计算公式是
$$S_{\text{扇形}} = \frac{n}{360} \pi R^2$$
。

又因为扇形的弧长 $l = \frac{n\pi R}{180}$ ，扇形面积 $\frac{n\pi R^2}{360}$ 可以写成 $\frac{1}{2} \cdot \frac{n\pi R}{180} \cdot R$ ，所以又得到扇形面积的另一个计算公式：

$$S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2}lR$$



知识点 3、弓形的面积

- (1) 弓形的定义：由弦及其所对的弧（包括劣弧、优弧、半圆）组成的图形叫做弓形。
- (2) 弓形的周长 = 弦长 + 弧长
- (3) 弓形的面积

如图所示，每个圆中的阴影部分的面积都是一个弓形的面积，从图中可以看出，只要把扇形 OA_mB 的面积和 AOB 的面积计算出来，就可以得到弓形 A_mB 的面积。

当弓形所含的弧是劣弧时，如图 1 所示， $S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇形}OA_mB} - S_{\triangle AOB}$

当弓形所含的弧是优弧时，如图 2 所示， $S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇形}OA_mB} + S_{\triangle AOB}$

当弓形所含的弧是半圆时，如图 3 所示， $S_{\text{弓形}} = \frac{1}{2}S_{\text{半圆}}$

注意：(1) 圆周长、弧长、圆面积、扇形面积的计算公式。

	圆周长	弧长	圆面积	扇形面积
公式	$C = 2\pi R$ $C = \pi d$	$S = \frac{n}{360}$	$S = \pi R^2$	$S = \frac{n}{360} \pi R^2$ $S = \frac{1}{2}lR$

(2) 扇形与弓形的联系与区别

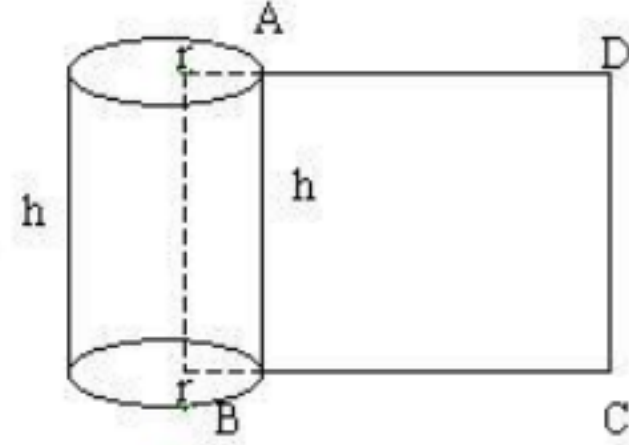
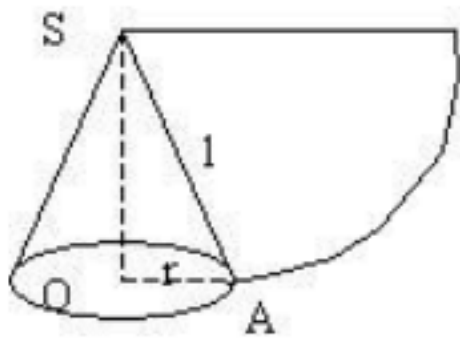
(2) 扇形与弓形的联系与区别

图示			
面积	$S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇形}} - S_{\triangle}$	$S_{\text{弓形}} = \frac{1}{2}S_{\text{圆}}$	$S_{\text{弓形}} = S_{\text{扇形}} + S_{\triangle}$

知识点 4、圆锥的侧面积

圆锥的侧面展开图是一个扇形， 如图所示， 设圆锥的母线长为 l ， 底面圆的半径为 r ， 那么这个扇形的半径为 l ，

扇形的弧长为 $2\pi r$ ， 圆锥的侧面积 $S_{侧} = \frac{1}{2}l \cdot 2\pi r = \pi rl$ ， 圆锥的全面积 $S_{全} = S_{侧} + S_{底} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l+r)$



说明：（1）圆锥的侧面积与底面积之和称为圆锥的全面积。

（2）研究有关圆锥的侧面积和全面积的计算问题，关键是理解圆锥的侧面积公式，并明确圆锥全面积与侧面积之间的关系。

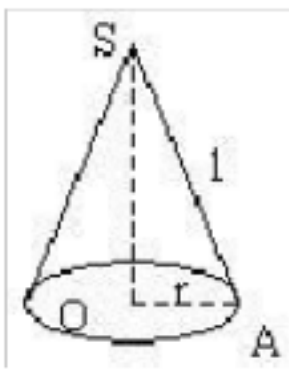
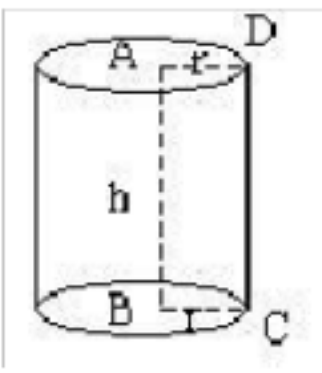
知识点 5、圆柱的侧面积

圆柱的侧面积展开图是矩形， 如图所示， 其两邻边分别为圆柱的高和圆柱底面圆的周长， 若圆柱的底面半径为

r ， 高为 h ， 则圆柱的侧面积 $S_{侧} = 2\pi r \cdot h$ ， 圆柱的全面积 $S_{全} = S_{侧} + S_{底} = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r)$

知识小结：

圆锥与圆柱的比较

名称	圆锥	圆柱
图形		
图形的形成过程	由一个直角三角形旋转得到的，如 $Rt \triangle SOA$ 绕直线 SO 旋转一周。	由一个矩形旋转得到的，如矩形 $ABCD$ 绕直线 AB 旋转一周。
图形的组成	一个底面和一个侧面	两个底面和一个侧面
侧面展开图的特征	扇形	矩形
面积计算方法	$S_{侧} = \pi rl$ $S_{全} = S_{侧} + S_{底} = \pi rl + \pi r^2$	$S_{侧} = 2\pi rh$ $S_{全} = S_{侧} + 2S_{底} = 2\pi rh + 2\pi r^2$

第二十五章 概率初步

25.1 随机事件与概率

1 . 随机试验与样本空间

具有下列三个特性的试验称为随机试验：

- (1) 试验可以在相同的条件下重复地进行；
- (2) 每次试验的可能结果不止一个，但事先知道每次试验所有可能的结果；
- (3) 每次试验前不能确定哪一个结果会出现。

试验的所有可能结果所组成的集合为样本空间，用 Ω 表示，其中的每一个结果用 e 表示， e 称为样本空间中的样本点，记作 $\Omega = \{e\}$.

2 . 随机事件

在随机试验中，把一次试验中可能发生也可能不发生、而在大量重复试验中却呈现某种规律性的事情称为随机事件（简称事件）. 通常把必然事件（记作 Ω ）与不可能事件（记作 ϕ ）看作特殊的随机事件 .

3 . 频率与概率的定义

(1) 频率的定义

设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 n_A 次，则比值 n_A / n 称为随机事件 A 发生的频率，记作 $f_n(A)$,

即
$$f_n(A) = \frac{n_A}{n} .$$

(2) 概率的统计定义

在进行大量重复试验中，随机事件 A 发生的频率具有稳定性，即当试验次数 n 很大时，频率 $f_n(A)$ 在一个稳定的值 P ($0 < P < 1$) 附近摆动，规定事件 A 发生的频率的稳定值 P 为概率，即 $P(A) = p$.

(3) 古典概率的定义

具有下列两个特征的随机试验的数学模型称为 古典概型 :

(i) 试验的样本空间 Ω 是个有限集，不妨记作 $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$;

(ii) 在每次试验中，每个样本点 e_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 出现的概率相同，即

$$P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \dots = P(\{e_n\}) .$$

在古典概型中，规定事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{A \text{中所含样本点的个数}}{\Omega \text{中所含样本点的个数}} = \frac{n_A}{n} .$$

(4) 几何概率的定义

如果随机试验的样本空间是一个区域（可以是直线上的区间、平面或空间中的区域），且样本空间中每个试验结果的出现具有等可能性，那么规定事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{A \text{的长度（或面积、体积）}}{\text{样本空间的长度（或面积、体积）}} \quad 2$$

25.2 用列举法求概率

1、当一次试验中，可能出现的结果是有限个，并且各种结果发生的可能性相等时，可以用被关注的结果在全部试验结果中所占的比分析出事件中该结果发生的概率，此时可采用列举法 .

2、列举法就是把要数的对象一一列举出来分析求解的方法 . 但有时一一列举出的情况数目很大，此时需要考虑如何去排除不合理的情况，尽可能减少列举的问题可能解的数目 .

3、利用列表法或树形图法求概率的关键是： 注意各种情况出现的可能性务必相同； 其中某一事件发生的

概率 = $\frac{\text{某一事件发生的次数}}{\text{各种情况出现的次数}}$; 在考查各种情况出现的次数和某一事件发生的次数时不能重复也不能遗漏 ;

4、用列表法或树形图法求得的概率是理论概率，而实验估计值是频率，它通常受到实验次数的影响而产生波动，因此两者不一定一致，实验次数较多时，频率稳定于概率，但并不完全等于概率。

25.3 用频率估计概率

在做大量重复试验时，随着试验次数的增加，一个随机事件出现的频率应该稳定于该事件发生的概率。事件发生的频率与概率既有区别又有联系：事件发生的频率不一定相同，是个变数，而事件发生的概率是个常数；但它们之间又有密切的联系，随着试验次数的增加，频率越来越稳定于概率。

在具体操作过程中，大家往往发现：虽然多次试验结果的频率逐渐稳定于概率，但可能无论做多少次试验，两者之间存在着一定的偏差。 应该注意：这种偏差的存在是经常的， 并且是正常的。 另外，由于受到某些因素的影响，通过试验得到的估计结果往往不太理想，甚至有可能出现极端情况，此时我们应正确地看待这样的结果并尝试着对结果进行合理的解释。对试验结果的频率与理论概率的偏差的理解也是形成随机观念的一个重要环节。

在实际应用中，当试验次数越大时，出现极端情况的可能性就越小。因此，我们常常通过做大量重复试验来获得事件发生的频率，并用它作为概率的估计值。试验次数越多，得到的估计结果就越可靠。

第二十六章 反比例函数

26.1 知识点 1 反比例函数的定义

一般地，形如 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数， $k \neq 0$) 的函数称为反比例函数，它可以从以下几个方面来理解：

x 是自变量， y 是 x 的反比例函数；

自变量 x 的取值范围是 $x \neq 0$ 的一切实数，函数值的取值范围是 $y \neq 0$ ；

比例系数 $k \neq 0$ 是反比例函数定义的一个重要组成部分；

反比例函数有三种表达式：

$$y = \frac{k}{x} \quad (k \neq 0),$$

$$y = kx^{-1} \quad (k \neq 0),$$

$$x \cdot y = k \quad (\text{定值}) \quad (k \neq 0);$$

函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 与 $x = \frac{k}{y}$ ($k \neq 0$) 是等价的，所以当 y 是 x 的反比例函数时， x 也是 y 的反比例函数。

(k 为常数， $k \neq 0$) 是反比例函数的一部分， 当 $k=0$ 时， $y = \frac{k}{x}$ ，就不是反比例函数了， 由于反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 中，只有一个待定系数，因此，只要一组对应值，就可以求出 k 的值，从而确定反比例函数的表达式。

26.2 知识点 2 用待定系数法求反比例函数的解析式

由于反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 中，只有一个待定系数，因此，只要一组对应值，就可以求出 k 的值，从而确定反比例函数的表达式。

26.3 知识点 3 反比例函数的图像及画法

反比例函数的图像是双曲线，它有两个分支，这两个分支分别位于第一、第三象限或第二、第四象限，它们与原点对称，由于反比例函数中自变量函数中自变量 $x \neq 0$ ，函数值 $y \neq 0$ ，所以它的图像与 x 轴、 y 轴都没有交点，即双曲线的两个分支无限接近坐标轴，但永远达不到坐标轴。

反比例的画法分三个步骤：列表；描点；连线。

再作反比例函数的图像时应注意以下几点：

列表时选取的数值宜对称选取；

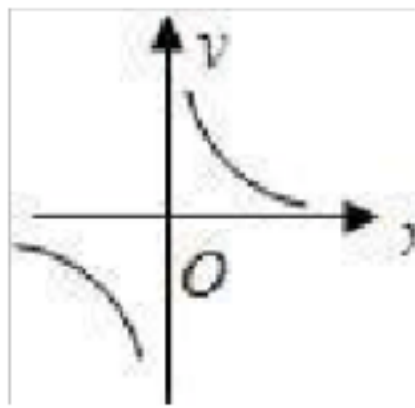
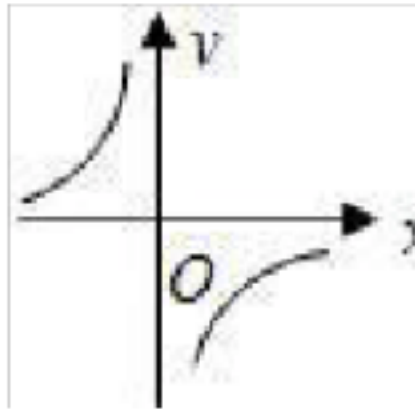
列表时选取的数值越多，画的图像越精确；

连线时，必须根据自变量大小从左至右（或从右至左）用光滑的曲线连接，切忌画成折线；

画图像时，它的两个分支应全部画出，但切忌将图像与坐标轴相交。

26.4 知识点 4 反比例函数的性质

关于反比例函数的性质，主要研究它的图像的位置及函数值的增减情况，如下表：

反比例函数	$y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$	
k 的符号	$k > 0$	$k < 0$
图像		
性质	<p>x 的取值范围是 $x \neq 0$，y 的取值范围是 $y \neq 0$</p> <p>当 $k > 0$ 时，函数图像的两个分支分别在第一、第三象限，在每个象限内，y 随 x 的增大而减小。</p>	<p>x 的取值范围是 $x \neq 0$，y 的取值范围是 $y \neq 0$</p> <p>当 $k < 0$ 时，函数图像的两个分支分别在第二、第四象限，在每个象限内，y 随 x 的增大而增大。</p>

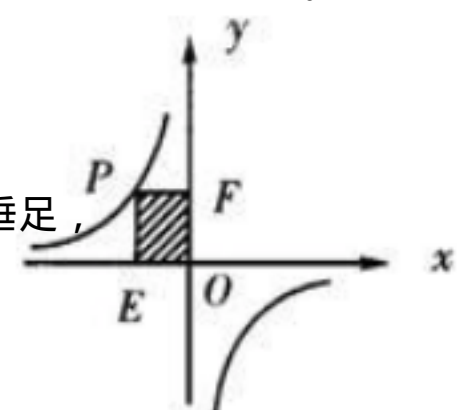
注意：描述函数值的增减情况时，必须指出“在每个象限内，”否则，笼统地说，当 $k > 0$ 时， y 随 x 的增大而减小“，就会与事实不符的矛盾。

反比例函数图像的位置和函数的增减性，是有反比例函数系数 k 的符号决定的，反过来，由反比例函数图像（双曲线）的位置和函数的增减性，也可以推断出 k 的符号。如 $y = \frac{k}{x}$ 在第一、第三象限，则可知 $k > 0$ 。

反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中比例系数 k 的绝对值 $|k|$ 的几何意义。

如图所示，过双曲线上任一点 $P(x, y)$ 分别作 x 轴、 y 轴的垂线， E 、 F 分别为垂足，

则 $|k| = |xy| = |x| \cdot |y| = PF \cdot PE = S_{\text{矩形 OEPF}}$



反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 中， $|k|$ 越大，双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 越远离坐标原点； $|k|$ 越小，双曲线 $y = \frac{k}{x}$ 越

靠近坐标原点。

双曲线是中心对称图形，对称中心是坐标原点；双曲线又是轴对称图形，对称轴是直线 $y=x$ 和直线 $y=-x$ 。

第二十七章 相似

27.1 图形的相似

概述

如果两个图形形状相同，但大小不一定相等，那么这两个图形相似。（相似的符号： \sim ）

判定

如果两个多边形满足对应角相等，对应边的比相等，那么这两个多边形相似。

相似比

相似多边形的对应边的比叫相似比。相似比为 1 时，相似的两个图形全等。

性质

相似多边形的对应角相等，对应边的比相等。相似多边形的周长比等于相似比。

相似多边形的面积比等于相似比的平方。

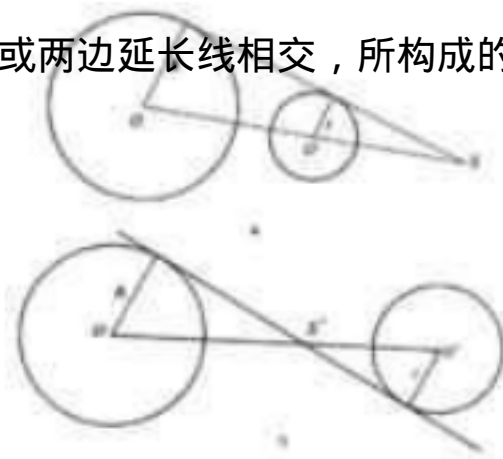
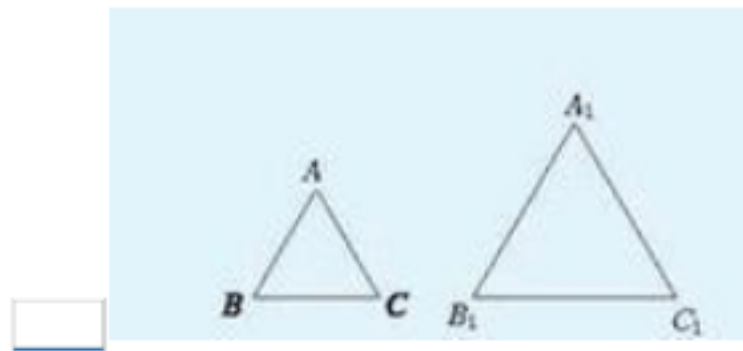
27.2 相似三角形

判定

1. 两个三角形的两个角对应相等
2. 两边对应成比例，且夹角相等
3. 三边对应成比例
4. 平行于三角形一边的直线和其他两边或两边延长线相交，所构成的三角形与原三角形相似。

例题

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$



$$\frac{ABC}{A'B'C'}$$

性质

1. 相似三角形的一切对应线段（对应高、对应中线、对应角平分线、外接圆半径、内切圆半径等）的比等于相似比。

2. 相似三角形周长的比等于相似比。

3. 相似三角形面积的比等于相似比的平方

27.3 位似

如果两个图形不仅是相似图形，而且每组对应点的连线交于一点，对应边互相平行，那么这两个图形叫做位似图形，这个点叫做位似中心，这时的相似比又称为位似比。

性质

位似图形的对应点和位似中心在同一直线上，它们到位似中心的距离之比等于相似比。

位似多边形的对应边平行或共线。

位似可以将一个图形放大或缩小。

位似图形的中心可以在任意的一点，不过位似图形也会随着位似中心的位变而位变。

根据一个位似中心可以作两个关于已知图形一定位似比的位似图形，这两个图形分布在位似中心的两侧，并且关于位似中心对称。

注意

1、位似是一种具有位置关系的相似，所以两个图形是位似图形，必定是相似图形，而相似图形不一定是位似图形；

2、两个位似图形的位似中心只有一个；

3、两个位似图形可能位于位似中心的两侧，也可能位于位似中心的一侧；

4、位似比就是相似比。利用位似图形的定义可判断两个图形是否位似；

5、平行于三角形一边的直线和其它两边相交，所构成的三角形与原三角形位似。

第二十八章 锐角三角函数

28.1 锐角三角函数

锐角角 A 的正弦 (sin) ,余弦 (cos) 和正切 (tan) ,余切 (cot) 以及正割 (sec) , (余割 csc) 都叫做角 A 的锐角三角函数。

正弦 (sin) 等于对边比斜边，余弦 (cos) 等于邻边比斜边，正切 (tan) 等于对边比邻边；

直角三角形 ABC 中，

角 A 的正弦值就等于角 A 的对边比斜边，余弦等于角 A 的邻边比斜边，正切等于对边比邻边，

28.2 解直角三角形

勾股定理，只适用于直角三角形 (外国叫 “ 毕达哥拉斯定理 ”)

$a^2+b^2=c^2$ ，其中 a 和 b 分别为直角三角形两直角边，c 为斜边。

勾股弦数是指一组能使勾股定理关系成立的三个正整数。比如：3, 4, 5。他们分别是 3, 4 和 5 的倍数。

直角三角形的特征

直角三角形两个锐角互余；

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半；

直角三角形中 30° 所对的直角边等于斜边的一半；

勾股定理：直角三角形中，两直角边的平方和等于斜边的平方，即：

在 Rt ABC 中，若 $C = 90^\circ$ ，则 $a^2+b^2=c^2$ ；

勾股定理的逆定理：如果三角形的一条边的平方等于另外两条边的平方和，

则这个三角形是直角三角形，即：

在 ABC 中，若 $a^2+b^2=c^2$ ，则 $C = 90^\circ$ ；

射影定理： $AC^2=AD \cdot AB, BC^2=BD \cdot AB, CD^2=DA \cdot DB$.

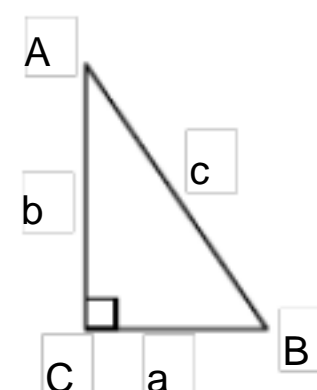
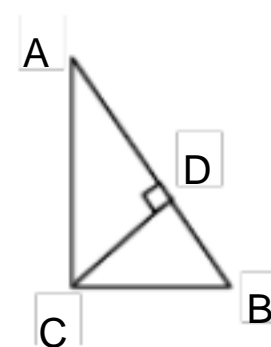
锐角三角函数的定义：

如图，在 Rt ABC 中， $C = 90^\circ$ ，

A, B, C 所对的边分别为 a, b, c,

则 $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$, $\tan A = \frac{a}{b}$, $\cot A = \frac{b}{a}$

特殊角的三角函数值：(并会观察其三角函数值随 α 的变化情况)



α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
30°	$\frac{1}{2}$ 错误！未找到引用源。	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1

$1 \cdot 60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
--------------------	----------------------	---------------	------------	----------------------

解直角三角形 (Rt $\triangle ABC$, $C = 90^\circ$)

三边之间的关系: $a^2 + b^2 = c^2$.

两锐角之间的关系: $A + B = 90^\circ$. .

边角之间的关系: $\sin A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{\angle A \text{ 的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c}$, $\tan A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\angle A \text{ 的邻边}} = \frac{a}{b}$,

解直角三角形中常见类型:

已知一边一锐角 . 已知两边 . 解直角三角形的应用 .

第二十九章 投影与视图

29.1 投影

一般地, 用光线照射物体, 在某个平面 (地面、墙壁等) 上得到的影子叫做物体的投影 (projection), 照射光线叫做投影线, 投影所在的平面叫做投影面。

有时光线是一组互相平行的射线, 例如太阳光或探照灯光的一束光中的光线。由平行光线形成的投影是平行投影 (parallel projection)。

由同一点 (点光源发出的光线) 形成的投影叫做中心投影 (center projection)。投影线垂直于投影面产生的投影叫做正投影。

投影线平行于投影面产生的投影叫做平行投影。

物体正投影的形状、大小与它相对于投影面的位置有关。

29.2 三视图

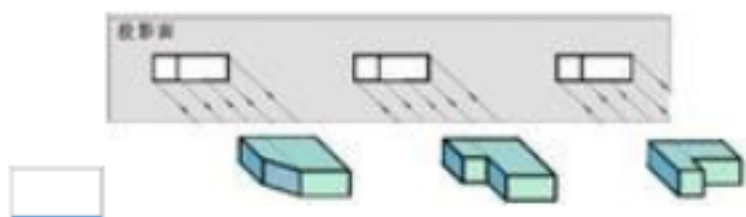
三视图是观测者从三个不同位置观察同一个空间几何体而画出的图形。

将人的视线规定为平行投影线, 然后正对着物体看过去, 将所见物体的轮廓用正投影法绘制出来该图形称为视图。一个物体有六个视图: 从物体的前面向后面投射所得的视图称主视图——能反映物体的前面形状, 从物体的上面向下面投射所得的视图称俯视图——能反映物体的上面形状, 从物体的左面向右面投射所得的视图称左视图——能反映物体的左面形状,

还有其它三个视图不是很常用。三视图就是主视图、俯视图、左视图的总称。

特点: 一个视图只能反映物体的一个方位的形状, 不能完整反映物体的结构形状。三视图是从三个不同方向对同一个物体进行投射的结果, 另外还有如剖面图、半剖面图等做为辅助, 基本能完整的表达物体的结构。

主视、俯视 长对正



物体的投影

主视、左视 高平齐

左视、俯视 宽相等

在许多情况下, 只用一个投影不加任何注解, 是不能完整清晰地表达和确定形体的形状和结构的。如图所

示，三个形体在同一个方向的投影完全相同，但三个形体的空间结构却不相同。可见只用一个方向的投影来表达形体形状是不行的。一般必须将形体向几个方向投影，才能完整清晰地表达出形体的形状和结构。

一个视图只能反映物体的一个方位的形状，不能完整反映物体的结构形状。三视图是从三个不同方向对同一个物体进行投射的结果，另外还有如剖面图、半剖面图等做为辅助，基本能完整的表达物体的结构。

画法：根据各形体的投影规律，逐个画出形体的三视图。画形体的顺序：一般先实（实形体）后空（挖去的形体）；先大（大形体）后小（小形体）；先画轮廓，后画细节。画每个



形体时，要三个视图联系起来画，并从反映形体特征的视图画起，再按投影规律画出其他两个视图。对称图形、半圆和大于半圆的圆弧要画出对称中心线，回转体一定要画出轴线。对称中心线和轴线用细点划线画出。